Aplikace určitého integrálu

1. Obsah oblasti omezené křivkami

   - $a \le x \le b$, $g(x) \le y \le f(x)$

     $$S = \int_a^b (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

   - $a \le x \le b$, $0 \le y \le f(x)$, kde $y = f(x)$ je dáné parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, φ, ψ spojité na $[t_1, t_2]$, φ ryze monotónní, φ' spojitá, $\varphi(t_1) = a$, $\varphi(t_2) = b$, ψ nezáporná na $[t_1, t_2]$

     $$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$$

   - Speciálně $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, $\theta_1 \le \theta \le \theta_2$, $0 \le r \le f(\theta)$

     $$S = \frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2} f^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

2. Objemy těles

   - Rotační těleso vzniklé rotací oblasti $a \le x \le b$, $g(x) \le y \le f(x)$, $a \ge 0$
     - kolem osy x

       $$V = \pi\int_a^b (f^2(x) - g^2(x))\,\mathrm{d}x$$

     - kolem osy y

       $$V = 2\pi\int_a^b (xf(x) - xg(x))\,\mathrm{d}x$$

   - $y = f(x)$ popsáno parametricky viz výše, $g(x) = 0$
     - kolem osy x

       $$V = \pi\int_{t_1}^{t_2} \psi^2(t)|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$$

     - kolem osy y

       $$V = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} \psi(t)|\varphi(t)\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t$$

- $0 \leq \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \leq \pi$, $0 \leq r \leq f(\theta)$ kolem osy x

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} f^3(\theta) \sin\theta \,\mathrm{d}\theta$$

- Je-li $S(x)$ obsah průřezu, $a \leq x \leq b$

$$V = \int_a^b S(x) \,\mathrm{d}x$$

3. Délka křivky

- Parametrický popis $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, φ', ψ' spojité

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} \,\mathrm{d}t$$

- speciálně $\varphi = x$, $\psi = f(x)$

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \,\mathrm{d}x$$

- $r = f(\theta)$

$$l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{f^2(\theta) + (f'(\theta))^2} \,\mathrm{d}\theta$$

4. Obsah rotačních ploch

- Rotace parametricky popsané plochy (viz výše) kolem osy x

$$S = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} |\psi(t)| \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} \,\mathrm{d}t$$

- Speciálně $\varphi = x$, $\psi = f(x)$

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2} \,\mathrm{d}x$$

- $r = f(\theta)$, f' spojitá

$$S = 2\pi \int_{\theta_1}^{\theta_2} |f(\theta)| \sin\theta \sqrt{f^2(\theta) + (f'(\theta))^2} \,\mathrm{d}\theta$$

5. Statické momenty, momenty setrvačnosti, těžiště

- Oblast omezená $a \le x \le b$, $g(x) \le y \le f(x)$, f, g spojité, $\sigma(x)$ plošná hustota

  Statické momenty vzhledem k ose x resp. y

  $$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \sigma(x)(f^2(x) - g^2(x))\,\mathrm{d}x \quad M_y = \int_a^b \sigma(x)x(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

  Těžiště $T = [\xi, \eta]$, kde

  $$\xi = \frac{M_y}{M} \qquad \eta = \frac{M_x}{M} \quad M = \int_a^b \sigma(x)(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$

  Momenty setrvačnosti vzhledem k osám x, y, z

  $$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b \sigma(x)(f^3(x) - g^3(x))\,\mathrm{d}x$$
  $$I_y = \int_a^b \sigma(x)x^2(f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x$$
  $$I_z = I_x + I_y$$

- Hmotný oblouk $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ s lineární hustotou $\mu(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, φ', ψ' spojité

  Statické momenty vzhledem k osám x, y

  $$M_x = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$
  $$M_y = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\varphi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

  Těžiště $T = [\xi, \eta]$, kde

  $$\xi = \frac{M_y}{M} \qquad \eta = \frac{M_x}{M} \quad M = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

  Momenty setrvačnosti vzhledem k osám x a y jsou

  $$I_x = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\psi^2(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$
  $$I_y = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\varphi^2(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

- Rotační těleso $a \leq x \leq b$, $0 \leq g(x) \leq \sqrt{y^2 + z^2} \leq f(x)$ s objemovou hustotou $\gamma(x)$

  Statické momenty vzhledem k souřadnicovým rovinám

  $$M_{xy} = M_{xz} = 0 \qquad M_{yz} = \pi \int_a^b \gamma(x) x (f^2(x) - g^2(x)) \,\mathrm{d}x$$

  Těžiště

  $$T = (\xi, 0, 0), \quad \xi = \frac{M_{yz}}{M} \quad M = \pi \int_a^b \gamma(x)(f^2(x) - g^2(x)) \,\mathrm{d}x$$

  Moment setrvačnosti vzhledem k ose x je

  $$I_x = \frac{1}{2}\pi \int_a^b \gamma(x)(f^4(x) - g^4(x)) \,\mathrm{d}x$$